

VU Research Portal

Leren oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen. Effecten van een didactische interventie

Hoek, D.; Van den Eeden, P.; Terwel, J.

published in

Pedagogisch tijdschrift
1996

document version

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Hoek, D., Van den Eeden, P., & Terwel, J. (1996). Leren oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen. Effecten van een didactische interventie. *Pedagogisch tijdschrift*, 21(6), 403-426.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl

Leren oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen

Effecten van een didactische interventie¹

D. HOEK, P. VAN DEN EEDEN & J. TERWEL

Samenvatting

Dit artikel betreft een onderzoek naar het effect van een speciale didactische aanpak, gericht op de verwerving van cognitieve strategieën bij het leren oplossen van wiskundige problemen. In deze studie is speciaal gelet op differentiële effecten. De aandacht voor verschillen tussen zwakke en sterke leerlingen (differentiële effecten) komt voort uit eerder onderzoek naar het leren in kleine groepen en uit resultaten van recente meta-analyses naar het effect van vaardigheidstrainingen. Uit deze studies komt naar voren dat de leerresultaten in het algemeen vooruitgaan, maar dat zwakke leerlingen doorgaans niet voldoende profiteren van dit type interventies (groepswork en vaardigheidstrainingen). De vraag is nu of het mogelijk is een programma te ontwerpen waarbij alle leerlingen leerwinst boeken en waarbij de zwakke leerlingen meer profiteren dan hun tegenvoeters in de controlegroep. Daartoe is een interventiestudie uitgevoerd, waarin twee onderwijs-programma's worden vergeleken. De programma's waren identiek qua wiskundige inhoud en de gebruikte werkvormen, te weten een combinatie van klassikaal onderwijs, groepswork en individueel werken. De vergelijking betrof een experimenteel programma met een didactische interventie gericht op het proces van het probleemoplossen, waarbij extra aandacht werd gegeven aan zwakke leerlingen, en een controle-programma dat in grote lijnen identiek was maar waarin de interventie niet werd gerealiseerd. Het onderzoek werd uitgevoerd in 15 klassen. In totaal participeerden 367 leerlingen in het onderzoek. Uit het onderzoek blijkt dat de interventie het beoogde effect heeft opgeleverd. Over het geheel genomen is de leerwinst van de leerlingen in de experimentele conditie groter dan de leerwinst van de leerlingen in de controle-conditie. Die conclusie geldt in het bijzonder de zwakke leerlingen.

Inleiding en vraagstelling

Gedurende de laatste twintig jaar is er een toenemende aandacht voor didactische arrangementen waarin het leren in kleine groepen een belangrijke component vormt. Groepswork leek succes te beloven voor alle leerlingen. In verschillende onderzoeken werd geconstateerd dat leerlingen over het geheel genomen betere prestaties boeken bij groepswork dan bij de meer 'traditionele' werkvormen (Slavin, 1989, 1990; Johnson & Johnson, 1992). Andere onderzoekers, echter, konden geen positieve effecten aantonen van het leren in kleine, coöperatieve groepen (Davidson, 1985).

Meer recent hebben onderzoekers zich de vraag gesteld of de laag- en hoogpresteerders in verschillende mate profiteren van het werken in kleine groepen (Good, Mulryan &

McCaslin, 1992; Webb & Farivar, 1994; Cohen & Lotan, 1995). Leechor (1989) komt op theoretische gronden tot de conclusie dat zwakke leerlingen minder van groepswork zullen profiteren dan de hoogpresterende, sterke, leerlingen. De genoemde auteurs wijzen er op dat dit verschil tussen beide categorieën leerlingen mogelijk samenhangt met verschillen in participatie bij het oplossen van wiskundige problemen in de kleine groep. Uit observatiestudies van Webb (1982, 1989, 1991) en Salomon en Globerson (1989) blijkt dat sterke leerlingen de interactie bepalen. Zij zijn het die de initiatieven nemen en de uitleg geven tijdens het groepswork, terwijl de zwakke leerlingen afwachten, volgen of zelfs afhaken.

Hoe zijn deze verschillen te verklaren? Om te kunnen deelnemen aan het proces van probleemoplossen in de kleine groep, is bepaalde voorkennis essentieel. Er zijn aanwijzingen dat zwakke leerlingen hiaten hebben in hun voorkennis¹. Zo vonden Terwel en Van den Eeden (1990; 1992a; 1992b) en Van den Eeden en Terwel (1994) in empirisch onderzoek aanwijzingen dat leerlingen met middelmatige en hoge scores op een voortoets meer profiteerden van het groepswork dan leerlingen met lage scores. De verklaring voor deze bevindingen werd door de onderzoekers gezocht in de 'drempelhypothese' zoals geformuleerd door Dar en Resh (1986): om te kunnen profiteren van de instructie door de leraar en van het groepswork moet een leerling beschikken over een minimum aan kennis en vaardigheden². Als gevolg van tekorten in voorkennis kunnen zwakke leerlingen zich geen juiste mentale voorstelling van het probleem vormen, de instructie door de leraar niet begrijpen, de discussie in de kleine groep niet volgen en ook niet onder woorden brengen wat ze niet begrijpen. En sterke leerlingen slagen er niet altijd in, adequate uitleg aan zwakke leerlingen te geven (Ausubel, 1968; Resnick, 1989; De Corte & Verschaffel, 1988; Schoenfeld, 1987, 1989, 1992; Good, Mulryan & McCaslin, 1992; Terwel, 1994).

Tegen de achtergrond van deze onderzoeken ontstond het idee om een interventie-studie op te zetten, waarin een afzwakking van het 'Matthéüs-effect'² wordt nagestreefd door middel van een vaardigheidstraining, die aansluit bij de aanwezige kennis en vaardigheden, met speciale aandacht voor de zwakke leerlingen. Het lijkt van belang een dergelijke studie uit te voeren bij het leren in kleine groepen in de eerste fase voortgezet onderwijs op scholen met een heterogene brugperiode.

Waarom is het gewenst juist op dit gebied nadere studie te verrichten? Als er scholen zijn die, overeenkomstig de oorspronkelijke bedoelingen van de basisvorming, besluiten de leerlingen nog één of meer jaren in heterogene klassen te onderwijzen, is het van belang te zoeken naar didactische strategieën die effectief zijn voor alle leerlingen. Uit onderzoek blijkt dat leraren in heterogene klassen doorgaans 'gewoon' klassikaal blijven lesgeven en zich daarbij richten op de grote middengroep in de klas. Als gevolg van deze didactische strategie komen de leerlingen aan de uiteinden van de prestatiecurve onvoldoende tot hun recht. Onder druk van ouders van de sterke leerlingen, nog aangewakkerd door concurrentie van andere scholen, zijn veel scholen er toe over gegaan hun leerlingen al in de brugklas te sorteren in homogene stromen. Daarmee is het vraagstuk nog niet opgelost. Men kan de principiële vraag stellen of het wel wijs en rechtvaardig is leerlingen al op 12 jarige leeftijd op een min of meer definitief spoor te zetten. Men kan ook wijzen op problemen waarmee de school geconfronteerd zal worden. Zo worden er 'fouten' gemaakt bij de selectie van leerlingen en het blijkt een haast onmogelijke opgave kwalitatief hoogwaardig

onderwijs te verzorgen in de laagste stroom. Ouders voelen dit intuïtief aan en komen soms in verzet tegen de plaatsing van hun kind in de laagste stroom. Hoe men het ook wendt of keert, de groeperingspraktijken van scholen in combinatie met didactische strategieën van leraren resulteren doorgaans niet in een stimulerende leeromgeving voor alle leerlingen.

Tegen deze horizon zoekt men al jaren naar alternatieven. Onder de didactische strategieën (voor de heterogene klas) vormt het leren in kleine groepen een inspirerend alternatief. Er is een internationale beweging ontstaan rondom het 'leren door samenwerken'. 'Co-operative learning' houdt voor velen een belofte in, getuige de slogans waaronder deze arrangementen wereldwijd worden aangeboden: 'success for all', 'wiskunde voor iedereen', 'science for all', 'equal access to resources' en 'resource sharing in co-operative groups'.

Er zijn dus goede redenen om het vraagstuk van de 'differentiële effecten' te onderzoeken bij het leren in kleine groepen in heterogene klassen. Enerzijds is er bij velen de verwachting dat alle leerlingen kunnen profiteren van groepswerk en dat daarmee de dilemma's van het traditionele systeem kunnen worden vermeden. Anderzijds zijn er indicaties uit proces- en produktstudies dat de zwakke leerlingen onvoldoende in de kleine groep participeren en mede daardoor relatief weinig leerwinst boeken. De laatste jaren wordt de aandacht dan ook gericht op de voorbereiding en training van leerlingen met het oog op hun participatie in de klas en de kleine groep. Over welke kennis en vaardigheden moeten leerlingen beschikken om met succes te kunnen samenwerken? Met deze ontwikkeling van de vraagstelling komen twee onderzoekstradities bij elkaar: het onderzoek naar 'samenwerkend leren' en het onderzoek naar 'vaardigheden en leerstrategieën'. Interessant daarbij is dat vooral de laatste jaren in beide tradities meer aandacht is gekomen voor 'differentiële effecten'.

Uit recent onderzoek naar het effect van vaardigheidstrainingen blijkt dat over het geheel gezien de leerresultaten van leerlingen vooruit gaan, maar ook hier lijkt het er op dat zwakke leerlingen onvoldoende profiteren. Er zijn echter ook uitzonderingen waaruit blijkt dat ook zwakke leerlingen baat hebben bij trainingen gericht op het leren oplossen van (wiskundige) problemen (Hattie, Biggs, & Purdie, 1996; Chinnappan & Lawson, 1996).

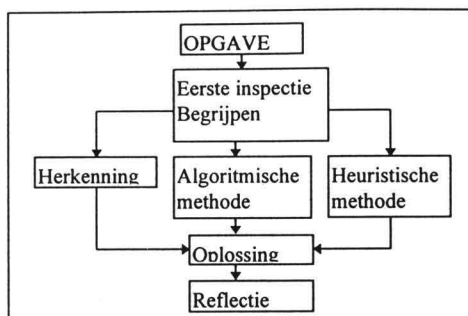
De redenering die aan ons onderzoek ten grondslag ligt kan nu als volgt worden samengevat. Als zwakke leerlingen niet beschikken over de vaardigheden die nodig zijn om productief te kunnen deelnemen aan het oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen en als deze vaardigheden door speciale instructie en begeleiding verworven kunnen worden dan moet het mogelijk zijn dat ook zwakke leerlingen leerwinst boeken in een didactisch arrangement met kleine groepen.

De vraagstelling voor het onderzoek kan nu als volgt worden geformuleerd: "Wat is het effect van speciale instructie en begeleiding gericht op de verwerving van cognitieve vaardigheden op de leerwinst van zwakke en sterke leerlingen bij het leren in kleine groepen in de eerste fase voortgezet onderwijs bij wiskunde?". Ter beantwoording van die vraag is een didactisch arrangement ontworpen waarbij een combinatie van verschillende werkvormen wordt gehanteerd (klassikale instructie, werken in kleine heterogene groepen en individueel werken). De speciale begeleiding werd door de leraar in tijdelijk ingestelde,

homogene subgroepen gegeven en in het bijzonder afgestemd op de zwakke leerlingen.

Theoretische achtergrond: leren probleemoplossen bij wiskunde

Meerdere auteurs wijzen op het belang van het integreren van algemene, strategische kennis en vakinhoudelijke kennis. De transfer van algemene vaardigheden, zoals probleemoplossen, naar vakinhoudelijke gebieden laat vaak te wensen over. Omgekeerd blijkt dat leerlingen vaak moeite hebben met het toepassen van vakinhoudelijke kennis, bijvoorbeeld op het gebied van wiskunde, bij andere vakken of bij problemen uit het dagelijks leven. Daarom stelt Van Streun (1994) voor het leren probleemoplossen op te nemen als onderdeel van het reguliere, voortgezet onderwijs in de schoolvakken. We gaan nu op zoek naar theoretische uitgangspunten voor een didactische aanpak van het leren probleemoplossen bij het vak wiskunde. Hoe verloopt het proces van probleemoplossen, als de leerling een wiskundig probleem wordt voorgelegd? Volgens Van Streun (1994) verloopt het proces volgens onderstaand model.³



Figuur 1. Schematische voorstelling van het probleem oplossingsproces

Idealiter probeert de leerling allereerst na te gaan of hij het probleem begrijpt: hij bouwt een mentale voorstelling op. Vervolgens zijn er drie mogelijkheden. De leerling herkent het probleem direct en kiest als vanzelf de juiste oplossing. De tweede mogelijkheid is dat het probleem wordt herkend als behorend tot een klasse, die volgens een bepaald algoritme kan worden opgelost. Bij het gebruik van een algoritme moet de leerling een aantal fasen doorlopen. Als dat op een goede manier wordt gedaan is de oplossing gegarandeerd. Het uitvoeren van het algoritme is, tot op zekere hoogte, een kwestie van routine (Taconis, 1995). Tenslotte is er nog een derde mogelijkheid: de heuristiek. Een heuristiek is een aanwijzing die de kans op het vinden van de oplossing vergroot, maar die geen zekerheid biedt. Het gebruik van een heuristiek is noodzakelijk als het probleem niet direct wordt herkend of als categorisering van het probleem niet mogelijk is. Toepassing van een heuristiek vereist dat de leerling na een eerste inspectie, waarin een eerste mentale voorstelling wordt gevormd, nog een aantal fasen van het probleemoplossen doorloopt. Het door ons gehanteerde schema van het oplossingsproces is voor een belangrijk deel

gebaseerd op het heuristisch model van Van Streun met als hoofdfasen: (i) probleemverkenning, (ii) keuze van een heuristische methode, (iii) plan, (iv) uitvoering, (v) terugblik en evaluatie. In het onderhavige onderzoek is het model van Van Streun enigszins aangepast aan de situatie bij groepswerk, door meer rekening te houden met het samen formuleren van het probleem, het samen doorlopen van de verschillende fasen in het proces en de reflectie daarop. In de laatste fase vergelijken de leerlingen hun (groeps)antwoorden met elkaar en vindt er een reflectie plaats op de verschillen in oplossingen en oplossingsmethoden.

Als leerlingen wiskundige problemen oplossen, oriënteren zij zich op de opgave en reflecteren zij op het proces. Daarbij maken leerlingen gebruik van strategieën om hun leerproces te sturen. Leerlingen kunnen dat bijvoorbeeld doen door te controleren of zij op de goede weg zijn. Zij kunnen de opgave opnieuw doorlezen en zich een nieuwe voorstelling van het probleem vormen. Als leerlingen zo te werk gaan maken zij gebruik van procesbegeleidende strategieën. Volgens Flavell (1979) is het begeleiden van het eigen cognitief functioneren van groot belang.

Verschillen tussen zwakke en sterke leerlingen, in de wijze waarop zij problemen oplossen, kunnen in deze termen worden begrepen. Zwakke leerlingen hebben dikwijls moeite met het vormen van een juiste voorstelling van het probleem. Zij beschikken meestal niet over de vereiste declaratieve en procedurele voorkennis (Ferguson-Hessler, 1989). Deze voorkennis bepaalt in hoge mate het verloop van het oplossingsproces (Dochy, 1992). Volgens Veenman en Elshout (1992) kunnen zwakke leerlingen worden gekarakteriseerd door een opeenstapeling van een gebrek aan kennis van het domein, beperkte intellectuele capaciteiten en een gebrekkige probleemaanpak. Zwakke leerlingen beschikken meestal niet over de vereiste (meta-)cognitieve vaardigheden om hun eigen leerproces te sturen en te controleren (Resnick, 1989; De Corte & Verschaffel, 1988; Van Hout-Wolters, 1992; Van Hout-Wolters, Ten Dam, Rijlaarsdam, & Terwel, 1992; Schoenfeld, 1987).

Trainingen in cognitieve vaardigheden hebben doorgaans een positief effect. Maar het gevaar bestaat dat zwakke leerlingen onvoldoende van zo'n vaardigheidstraining profiteren. Zo concluderen Hattie, Biggs en Purdie (1996) in hun meta-analyse naar het effect van dergelijke interventies: "It seems that low-ability students are unable to benefit from interventions of most kinds..." Het lijkt er dus op dat vaardigheidstrainingen vooral ten goede komen aan de betere leerlingen. Gelukkig zijn er enkele uitzonderingen, met name als speciale aandacht wordt gegeven aan zwakke leerlingen. Hattie, Biggs en Purdie stellen dan ook voor, het vraagstuk van de zwakke leerlingen nog nadrukkelijker in toekomstig onderzoek te betrekken.

Door leerlingen te trainen meer aandacht te schenken aan het *proces* van probleem- oplossen en het *reflecteren* op het gegeven antwoord, is het in principe mogelijk dat ook zwakke leerlingen profiteren. Veenman en Elshout (1992) zijn van mening dat door een gerichte didactische aanpak, aan wat zij noemen het 'Armageddon' van de zwakke leerling kan worden ontsnapt. Daarbij denken zij aan een aangepast niveau en aan een training in vaardigheden speciaal voor zwakke leerlingen.

Medeleerlingen kunnen hierbij een belangrijke functie vervullen, mits zij worden voorbereid op een ondersteunende rol in de groep. De docent dient model te staan voor zijn leerlingen. Hij kan ondersteuning geven, door het geven van demonstraties waarbij een bepaalde

oplossingsstrategie wordt gevolgd. Hij kan op verschillende momenten in het proces pas op de plaats maken en samen met zijn leerlingen terugblikken en vooruitkijken. Hij kan conceptuele modellen aanreiken, uitnodigen tot het herformuleren van het probleem, vragen stellen, voorbeelden en tegenvoorbeelden geven, relaties leggen, enzovoort. Daarbij dient hij speciale aandacht te geven aan zwakke leerlingen, vooral bij de oriëntatie op het probleem en bij het reflecteren op het proces van probleemoplossen.

Het hier gepresenteerde interventie-onderzoek is gericht op deze proces-begeleidende strategieën van de leerlingen. Nagegaan wordt of het leerproces door het gebruik van dergelijke strategieën kan worden bevorderd, speciaal met het oog op de zwakke leerlingen.

Onderzoeksvraag en hypothesen

Het onderzoek is gericht op het effect van een interventie. De vraagstelling voor het onderzoek is: Wat is het effect van een speciale instructie en begeleiding gericht op de verwerving van cognitieve strategieën op de leerwinst van zwakke en sterke leerlingen bij het leren in kleine groepen?

Op grond van theorievorming en empirisch onderzoek zoals in het voorgaande gepresenteerd, is te verwachten dat er een differentieel effect zal optreden. Sterkere leerlingen zullen naar verwachting meer van het onderwijs (in casu het groepswork) profiteren dan zwakkere leerlingen (Good, Mulryan en McCaslin, 1992; Terwel, 1994; Dar en Resh, 1994). Deze verwachting geldt in principe voor zowel de experimentele als de controle-conditie, omdat groepswork in beide condities deel uit maakt van het didactisch arrangement.

Het doel van de interventie is om twee effecten te bereiken: een algemeen effect op de leerwinst en een verzachting van het 'Matthéüs-effect' door de extra aandacht voor de zwakke leerlingen. De te toetsen hypothesen kunnen nu als volgt worden geformuleerd.

I De differentiële effect-hypothese

Ten eerste is te verwachten dat er een progressieve stijging van de leerwinst zal optreden. Dat wil zeggen dat sterkere leerlingen meer winnen per score-eenheid op de voortoets dan de zwakkere leerlingen. We verwachten dus een curvi-lineair verband tussen voortoets en de natoets. Dit verband is een operationele omschrijving van het 'Matthéüs-effect'.

II De cognitieve strategie-hypothese

Ten tweede verwachten we dat de interventie (een speciale instructie en begeleiding gericht op de verwerving van cognitieve strategieën) over het geheel gezien een positief effect heeft op de leerresultaten. Leerlingen in de experimentele groep zullen betere resultaten behalen dan leerlingen in de controlegroep (zie ook Hattie, Biggs, & Purdie, 1996).

3. De 'remediërings-hypothese'

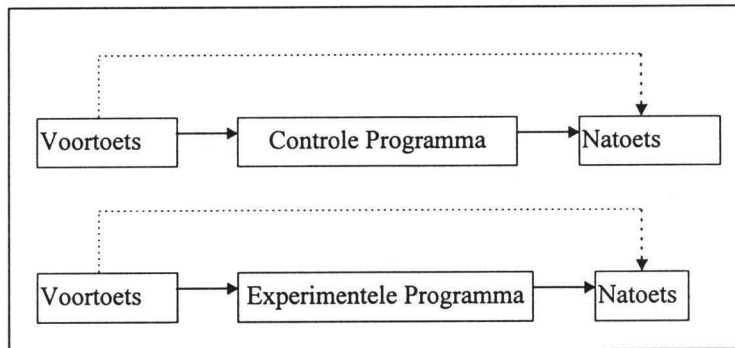
In de didactische interventie wordt extra aandacht besteed aan zwakke leerlingen. Deze extra steun is voor te stellen door de metafoor 'scaffolding'. Dat betekent letterlijk 'steigerbouw'. Hierdoor kunnen de werklieden beter bij het bouwwerk komen en kunnen zij hun materialen en gereedschappen dichterbij het werk brengen. Men zou daarbij ook kunnen denken aan het creëren van een stut, een steun, een schraag, een ladder of een platform. Zwakke leerlingen kunnen dankzij de remediërende instructie en begeleiding ('scaffolding') problemen oplossen die zij nog niet geheel op eigen kracht aankunnen. Gaandeweg wordt de begeleiding 'afgebouwd' en kan de leerling zelfstandig verder³. Op grond hiervan is te verwachten dat de zwakke leerlingen in het experimentele programma meer zullen profiteren dan de zwakke leerlingen in het controle programma. In de experimentele groep wordt op grond van de remediërende instructie en begeleiding ('scaffolding') een afzwakking van het Differentiële effect ('Matthéüs-effect') verwacht omdat de zwakke leerlingen meer kunnen profiteren. Men kan zich het verwachte effect van het remediëren voorstellen als een maatregel waardoor het inkomen van de laagste inkomensgroepen wordt verhoogd (compensatie).

Deze hypothesen zullen worden getoetst in een multilevel model. Daarbij wordt gecontroleerd voor het individueel effect van de voortoets-score op de score van de natoets. In de analyse is er voor gekozen om de totale groep leerlingen niet te splitsen in drie afzonderlijke categorieën, 'zwak', 'middelmatic' en 'sterk', op grond van de score op de voortoets. Als er wordt gesproken over zwakke en sterke leerlingen betreft het dus geen strikt afgebakende categorieën maar een continue variabele. Voor een verantwoording van deze keuze zie de paragraaf over het model in de multilevel analyse.

Design en onderzoekssituatie

In dit onderzoek is een quasi-experimenteel design gehanteerd. Het betreft het 'voortoets-natoets design met een controle groep' (Cook & Campbell, 1981), waarin twee didactische arrangementen worden vergeleken. Figuur 2 is een schematische weergave van het onderzoeksontwerp.

De verzameling van de gegevens vond plaats in het voorjaar van 1994. In totaal namen 367 leerlingen in 15 klassen van 2 scholen deel aan het experiment. Er werden twee scholen bereid gevonden deel te nemen aan het onderzoek. Leraren en klassen werden zoveel mogelijk a-select toegewezen aan de condities (treatments). De twee condities werden binnen elk van de scholen gerealiseerd om eventuele schooleffecten te neutraliseren. Het onderzoek strekte zich uit over 4 lesweken en is uitgevoerd in het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs (basisvorming) bij het vak wiskunde. De samenstelling van de klassen op beide scholen is heterogeen voor wat betreft het eerste cursusjaar.



Figuur 2. Ontwerp van het experiment

Het didactisch arrangement

Voor het ontwerpen van het didactisch arrangement is het model Adaptief Groepsonderwijs (het AGO-model) als uitgangspunt gekozen⁴. Dit model bestaat uit verschillende fasen:

1. Klassikale introductie
2. Samenwerken in kleine heterogene groepen aan de kern
3. Diagnostische toets
4. Alternatieve leerwegen: a. individueel werken in kleine (heterogene) groepen; b. instructie en begeleiding door de leraar in de homogene (remediale) groep
5. Individueel werken op eigen niveau in heterogene groepen met wederzijdse hulp.
6. Klassikale reflectie en vooruitblik
7. Eindtoets.

Dit model is in beide condities als *uitgangspunt* genomen. Er zijn echter in beide condities belangrijke *modificaties* toegepast. De aanpassingen in het experimentele programma betreffen in het bijzonder fase 4 en 5. Na de diagnostische toets werden de leerlingen in homogene niveaugroepen ingedeeld: zwak, middelmatig en sterk. In fase 4 en 5 werkten de leerlingen in deze homogene groepen aan opgaven op hun niveau, onder begeleiding van de docent. De 'alternatieve leerwegen' werden voortgezet in fase 5: de leerlingen in de zwakke groepen kregen extra begeleiding van de leraar, terwijl de andere leerlingen in hun niveaugroep zelfstandig verder werkten aan opgaven op hun niveau, met de mogelijkheid van wederzijdse hulp. Deze aanpassingen vonden plaats met het oog op (i) de wensen van de docenten voor meer permanente (overzichtelijke) homogene subgroepen en (ii) de daarmee verbonden praktische uitvoerbaarheid van het onderzoek. De belangrijkste aanpassing betreft dus de instelling van *homogene* groepen in fase 4 en 5. (In het oorspronkelijke AGO-model werd in fase 4 en 5 de *heterogeniteit van de kleine groepen gehandhaafd zoals in fase 2*. Daar werden in fase 4b de zwakke leerlingen slechts tijdelijk uit hun heterogene groep gehaald voor remediale instructie door de leraar, waarna zij

weer teruggingen naar hun eigen heterogene groep om zelfstandig op eigen niveau verder te werken met de mogelijkheid van wederzijdse hulp).

In het controleprogramma werd in fase 4 eveneens in homogene niveaugroepen gewerkt, echter zonder de speciale, remediale hulp van de leraar in de laagste niveaugroep. Ook ontvingen deze docenten en leerlingen geen speciale training.

De didactische interventie

Voorafgaand aan het experiment kregen *alle* docenten (in beide condities) een korte training in het werken met kleine groepen en een oriëntatie op het didactisch arrangement en het bijbehorende lesmateriaal. De inhoud en duur van deze 'basis-training' was gelijk voor beide condities en betrof één bijeenkomst van ongeveer 3 uur. Daarnaast werd alle docenten gevraagd een algemene handleiding te lezen en het lesmateriaal te bestuderen. Exclusief voor de experimentele docenten was er een tweede bijeenkomst met bijbehorend schriftelijk materiaal in de vorm van een specifieke handleiding. Bovendien was er de mogelijkheid van consultatie voor docenten in de experimentele groep. Hieronder wordt nader ingegaan op de uitgangspunten en kenmerken van de didactische interventie, dat wil zeggen de onderscheidende kenmerken van het experimentele, cognitieve programma in vergelijking met het controle programma.

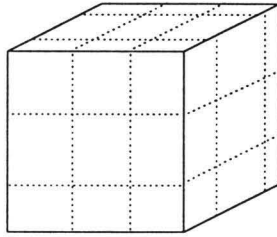
Het cognitieve programma is gebaseerd op de ideeën en onderzoeken van Polya (1957), Resnick (1989), Riemersma (1991), Schoenfeld (1992), Van Streun (1989) en Perrenet (1994). De leerlingen ontvingen aanwijzingen voor het oplossen van wiskundige problemen. Deze aanwijzingen waren heuristisch van aard. Het belangrijkste doel was het ontwikkelen van strategieën voor het oplossen van problemen. Bij het ontwerpen van het cognitieve programma werd onder meer gebruik gemaakt van het 'cognitive-apprenticeship-model' (Collins, Brown, & Newman, 1989) en het probleemoplossingsschema van Van Streun (1989). De gebruikte methoden zijn: modellering, coaching, articulatie en reflectie. Deze methoden passen goed in het beschreven didactisch arrangement.

De interventie in de experimentele conditie bestond uit vier elementen die alle waren gericht op de ontwikkeling en het gebruik van cognitieve strategieën: de extra training voor de docenten in het (didactisch) gebruik van cognitieve strategieën;

- I. de extra training voor de leerlingen in het gebruik van cognitieve strategieën;
- II. de speciale schriftelijke aanwijzingen voor de leerlingen in het cognitieve programma-op-papier;
- III. de speciale aanpak bij het cognitieve programma-in-actie bij het onderwijzen en begeleiden van de (zwakke) leerlingen.

A. de extra training voor de docenten in het (didactisch) gebruik van cognitieve strategieën;
De docenten in het cognitieve programma ontvingen een *extra* training. Daarbij werd speciale aandacht besteed aan het onderwijzen van cognitieve strategieën voor het oplossen van wiskundige problemen. Anders gezegd de docenten ontvingen een korte training in het onderwijzen en begeleiden van hun leerlingen. In deze training kregen de docenten onder meer het volgende probleem voorgelegd (zie figuur 3).

Uw buurman komt bij u langs en vertelt dat hij een kubus heeft verzaagd tot 27 kleine kubusjes. Hij zegt dat hij dat heeft gedaan door 6 keer te zagen. Tijdens dit zagen heeft hij de kubus bij elkaar gehouden zoals in de figuur hieronder. Hij vraagt aan u, omdat u wiskundige bent, of het mogelijk is om dit met minder zaagsneden te doen, bijvoorbeeld door de stukken die na elke keer zagen ontstaan te verplaatsen.



Figuur 3. Weergave van het probleem voor de docententraining

Bij het oplossen van dergelijke problemen ervaren docenten dat het belangrijk is om een goede voorstelling van het probleem te maken en te reflecteren op het gegeven antwoord. Als dit niet gebeurt is het oplossen van zo'n probleem vrijwel niet mogelijk. Vervolgens werd in de docententraining een heuristiek voor het oplossen van wiskundige problemen geïntroduceerd (het aangepaste model van Van Streun, zie figuur 1). Tenslotte werd de training en begeleiding van leerlingen in de experimentele (cognitieve) conditie uitgelegd en geïllustreerd aan de hand van vraagstukken die de leerlingen in het cognitieve programma zouden gaan maken. Deze vraagstukken werden door de docenten opgelost en besproken met het oog op te verwachten reacties van leerlingen en de afstemming van de begeleiding door de docent.

B. De extra training voor de leerlingen in het gebruik van cognitieve strategieën;

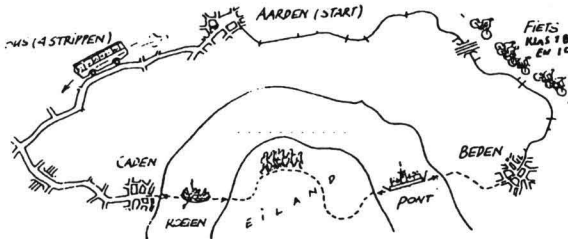
Gedurende de eerste les van het cognitieve programma ontvingen de leerlingen een expliciete training in het probleemoplossen van hun docent. We lichten dit toe aan de hand van een vraagstuk uit de methode 'Wiskunde Lijn' dat in de training aan de leerlingen werd voorgelegd (zie figuur 4) .

Voor het oplossen van het probleem in figuur 4 is het noodzakelijk om een adequate voorstelling van het probleem op te bouwen en subdoelen te hanteren terwijl het einddoel in de gaten wordt gehouden (means-end analysis). De leerlingen werden aan de hand van concrete opgaven vertrouwd gemaakt met de heuristiek en met cognitieve activiteiten als oriënteren en reflecteren. Na een afsluitende discussie maken de leerlingen onder leiding van de docent een poster. Hierop is het oplossingsproces schematisch weergegeven en toegelicht in de taal van de leerlingen. De poster wordt in de klas opgehangen. Na deze training wordt de rest van het programma uitgevoerd volgens de cyclus zoals omschreven in het didactisch arrangement. Overigens verschilt de rol van de docent in de training niet van zijn rol bij de verdere uitvoering van het cognitieve programma (zie D).

Voor de vier brugklassen wordt in de laatste schoolweek een fiets-, wandel-, roei- en bustocht georganiseerd. De klassen bestaan uit:

1A 28 leerlingen, 1B 30 leerlingen, 1C 27 leerlingen, 1D 29 leerlingen

Deze tocht ziet er als volgt uit:



Klassen 1B en 1C fietsen, met hun eigen fietsen, van Aarden naar Beden.

Vanuit Beden lopen ze naar de pont. Op het eiland moeten ze ook lopen. Aan de andere kant liggen de roeiboten (gebracht door de andere klas) klaar. Ze roeien naar Caden, waar ze met de bus weer terug gaan naar Aarden. De andere twee klassen leggen de route af in tegengestelde richting.

Kosten:

-	pont per persoon	f 1,25
-	roeiboot 6 personen per dag	f 45,00
-	bus 15 strippen kaart per stuk	f 11,20
-	ijsco per stuk	f 0,90
-	fles frisdrank per stuk	f 1,50

Bereken de kosten van deze toerday per persoon.

Figuur 4. Het probleem voor de leerling training in het experimentele programma

C. De speciale, schriftelijke aanwijzingen in het cognitieve programma-op-papier;

Het programma-op-papier bestaat uit een volledig uitgewerkte lessenserie voor de leerlingen met bijbehorende handleidingen voor de docenten. Dit programma is ontworpen op basis van de genoemde uitgangspunten en gestructureerd volgens de zeven fasen van het hiervoor beschreven didactisch arrangement. Het lesmateriaal is speciaal bewerkt voor de leerlingen in de experimentele conditie. Er is onder meer gebruik gemaakt van extra vragen en aanwijzingen voor het oplossen van de vraagstukken. Deze hebben ten doel de leerlingen te stimuleren om strategisch te werk te gaan. De handleiding voor de docenten bestaat uit twee delen (i) een algemeen deel met aanwijzingen en voorbeelden voor het werken in kleine groepen en (ii) een specifiek deel met extra aanwijzingen voor de experimentele conditie waarbij wordt ingegaan op procesgerichte instructie en op de speciale hulp aan zwakke leerlingen.

D. De speciale aanpak bij het cognitieve programma-in-actie

Hoe gaat de docent nu in de praktijk te werk? In een klassikale situatie demonstreert de docent strategieën voor het oplossen van wiskundige problemen. Hij vervult de rol van de 'meester' in het 'leerling-meester model' (Collins, Brown, & Newman, 1989). De docent staat model door de opgave hardop voor te lezen en zich af te vragen wat het probleem nu precies voorstelt. Hij doet dat in interactie met de klas. Hiermee laat de docent zien dat het belangrijk is zich een juiste voorstelling van het probleem te maken. Daartoe moet de opdracht zorgvuldig worden gelezen. De beeldvorming door de leerlingen kan worden ondersteund door het samen maken van een voorlopig overzicht, tekening, schema of grafiek waarin de probleemsituatie wordt geschetst. Vervolgens bespreekt de docent met zijn leerlingen hoe het probleem opgelost kan worden. Samen met zijn leerlingen maakt hij een plan. Vervolgens wordt dit plan uitgevoerd. Tenslotte laat de docent zien dat het van belang is terug te kijken op het gehele proces en de oplossing op juistheid te controleren.

Leerlingen die achterop dreigen te raken, blijkens de ervaringen bij het werken aan de kern en blijkens de uitkomsten van de diagnostische toets, krijgen extra begeleiding op hun niveau van de docent (in de remediale groep). Deze begeleiding kan worden aangeduid met de metafoor 'scaffolding' (steigerbouw). De leidende gedachte is om aangepaste en tijdelijke hulp aan leerlingen te geven. Deze hulp wordt langzaam teruggenomen wanneer blijkt dat de leerling weer zelfstandig verder kan. De aanwijzingen en voorbeelden die de docenten op dit punt aangereikt kregen, zijn opgenomen in de algemene handleiding (Perrenet, Herfs, & Terwel, 1991, blz. 21, 22, 26, 28) en in de specifieke handleiding voor het experimentele programma (Hoek & Terwel, 1996, blz. 14 en 15). In deze handleidingen wordt de metafoor 'scaffolding' uitgelegd en wordt ingegaan op het begrip 'afstemming'. Er wordt benadrukt dat docenten, bij het identificeren van leerlingen die speciale hulp nodig hebben en bij het geven van speciale hulp, vooral moeten steunen op eigen inzicht, ervaring en intuïtie. Daarnaast worden er in de handleidingen ook algemene richtlijnen, concrete suggesties en voorbeelden gegeven, hoe docenten in de praktijk hun didactisch handelen kunnen afstemmen op de specifieke leerbehoeften van hun leerlingen.

De onderzoeksinstrumenten

Voor en na de interventie werd een identieke toets voor wiskundig redeneren afgenomen. Deze toets bestaat uit twee subschalen van een bestaand instrument, het 'Prüfsystem für Schul- und Bildungsberatung', hierna afgekort met PSB (Horn, 1969). De subschalen Figurenreeks (subschaal 3) en Letter- en Cijferreeks (subschaal 4), bestaan elk uit 40 nonverbale items, die in moeilijkheid opklimmen. De instructie voor afname van deze toets is overgenomen uit Herfs, Mertens, Perrenet en Terwel (1991, blz. 160 en 162). De subschalen nummer 3 en 4 zijn gebruikt omdat ze volgens Horn (1969) hoog laden op 'general reasoning', één van de hoofdfactoren uit het 'Structure of Intelligence-model' (Guilford, 1967). De keuze voor deze toets impliceert dat effecten in termen van 'vergelegen transfer' zijn te beschouwen. Een voordeel is dat de didactische interventie geen specifieke voorbereiding op de eindtoets betekent. 'Teaching to the test' is een veel voorkomend probleem bij interventie-onderzoek, maar doet zich in ons onderzoek dus niet voor. De beperking van ons instrument (PSB) is echter dat de specifieke wiskundige

inhouden niet worden gedekt. De alpha-coëfficiënt voor de voormeting en de nameting op de toets voor wiskundig redeneren (PSB) is respectievelijk 0,81 en 0,71.

Beschrijvende statistiek en eenvoudige analyses

We geven nu eerst de belangrijkste karakteristieken van de verdeling en van de gegevens uit de voor- en nameting in tabel 1.

Tabel 1. Karakteristieken van de verdeling van de wiskundige redeneer voor- en natoets voor alle leerlingen (N-leerlingen = 367, N-klassen = 15)

	Gemiddelde	S.D.	Min.	Max.
<i>Controle programma, N-leerlingen = 195</i>				
<i>N-klassen = 8</i>				
voortoets	53,08	6,31	29,0	67,0
natoets	54,65	7,91	21,0	70,0
Vershil	1,57			
<i>Cognitief programma N-leerlingen = 172</i>				
<i>N-klassen = 8</i>				
voortoets	53,49	6,45	30,0	70,0
natoets	57,90	6,59	36,0	72,0
Vershil	4,41			

Uit tabel 1 is af te leiden dat alle leerlingen vooruitgaan van voortoets naar natoets. Voorts blijkt dat de leerwinst van de leerlingen in het experimentele programma groter is dan die van de leerlingen in het controleprogramma. De leerwinst uitgedrukt in verschillscores is voor de experimentele groep 4.41 punten en 1.57 punten voor de controle groep.

Uit een variantie-analyse blijkt dat er op de voormeting van de wiskundige redeneertoets (PSB) geen significant verschil is tussen de score van de leerlingen in de twee programma's: ($F = 0,34$; $p = 0,56$). Bij de nameting is er echter wel een significant verschil tussen de gemiddelde score van de leerlingen in de twee verschillende programma's: ($F = 18,01$; $p = 0,00$). Vervolgens is een variantie-analyse uitgevoerd naar het verschil tussen de twee condities, waarbij de voortoets als co-variabele en natoets als afhankelijke variabele is gehanteerd. Ook deze analyse laat een significant verschil zien tussen de twee programma's, in het voordeel van het cognitieve programma, ($F = 123,53$; $p = 0,00$).

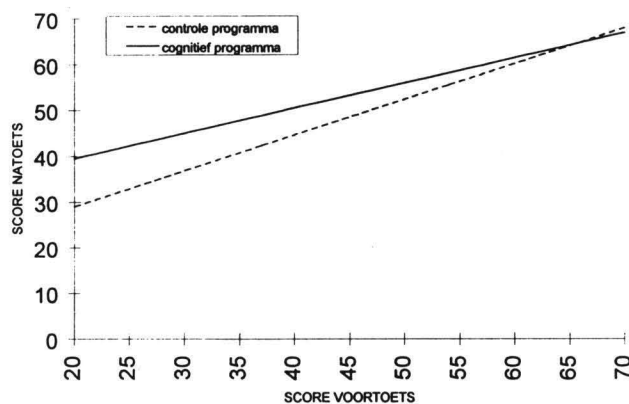
Er kan geconcludeerd worden dat er in het algemeen een positief effect is van het experimentele programma op het de leerwinst van de leerlingen met betrekking tot wiskundig redeneren. De effect-grootte van het experimentele programma is 0.52 (zoals gedefinieerd door Cohen, 1988). Volgens Cohen (1988) is dit een middelgroot effect. Ook als men

deze uitkomst vergelijkt met de grootte van de 'effect sizes' voor interventies gericht op vaardigheden is te spreken van een middelgroot effect (zie bijvoorbeeld de uitkomsten van de meta-analyse van Hattie, Biggs, & Purdie, 1996).

Om een eerste indruk van eventuele differentiële effecten te krijgen, is een lineaire regressie-analyse uitgevoerd van de voortoets op de natoets. De gegevens in Tabel 2 en de grafiek in Figuur 5 laten een verschil in intercept en helling zien voor de regressielijnen in de verschillende condities.

Tabel 2. Karakteristieken van de regressie van de natoets op de voortoets. Standaarddeviatie tussen haakjes de verklaarde variante (R^2). N-studenten = 367, N-klassen = 15

	a (intercept)	b (helling)	R^2	N
Controle programma	13,40	0,78 (0,08)	0,38	195
Cognitief programma	28,47	0,55 (0,05)	0,39	172



Figuur 5. Regressie van de voortoets op de natoets met behulp van de individuele leerlinggegevens

De regressielijn voor het controleprogramma heeft een relatief laag intercept (13,40) en een relatief hoge richtingscoëfficiënt (0,78). Bij het cognitieve programma is het omgekeerde te zien. We zien hier een relatief hoog intercept (28,47) en een relatief lage helling (0,55). Uit deze gegevens is opnieuw te concluderen dat de leerlingen over het algemeen gezien profiteren van de interventie. Bovendien lijkt het erop dat zwakke leerlingen beter af zijn in het experimentele programma dan in het controleprogramma. We gaan nu kijken of deze voorlopige bevindingen stand houden in een meer geavanceerde analyse waarbij preciezer kan worden gekeken naar algemene en differentiële effecten.

Het model in de multilevel analyse

Voor de nadere analyse is gebruik gemaakt van een multilevel model. Er zijn door ons twee belangrijke keuzen gemaakt die eerst zullen worden verantwoord. Het betreft de keuze voor een multi-level benadering en daarbinnen de keuze voor een continue variabele als aanduiding van zwakke en sterke leerlingen.

We gebruiken bij het toetsen van een 'differentieel-effect hypothese' een continue variabele voor de bekwaamheid van de leerling om zoveel mogelijk informatie te behouden. Wanneer we bovendien deze variabele hanteren als een interactie-variabele op het niveau van de leerling in een multilevel model kunnen de verschillen in leerprocessen maar ook de verschillen in prestaties tussen de leerlingen met een verschillende bekwaamheid verfijnd worden vergeleken en in een later stadium met bijvoorbeeld klassenkenmerken in verband worden gebracht.

Wanneer daarentegen de variabele 'bekwaamheid' zou worden gesplitst in bijvoorbeeld twee categorieën (bijvoorbeeld zwak/sterk) en per categorie de regressie-techniek wordt toegepast, worden alleen maar twee regressies met elkaar vergeleken in verschillende klassen, en mogelijk worden de coëfficiënten zelf in een tweede stap geredresseerd op klassenvariabelen. In dat geval zullen de schattingen minder efficiënt zijn dan wanneer een multilevel model wordt gebruikt. Die inefficiënte uitkomsten per categorie zullen vervolgens onderling moeten worden vergeleken en de significantie van de optredende verschillen moeten worden vastgesteld.

Wanneer evenwel binnen een multilevel model de verschillen tussen sterke en zwakke leerlingen als een continue variabele worden opgevat, gaat er geen informatie verloren en kan het differentieel effect meer nauwkeurig, bijvoorbeeld als een tweede machts-vergelijking, worden gemodelleerd. De procedure met regressie-analyses per categorie is duidelijk inferieur aan die welke gebruik maakt van het multilevel model.

De analyse is uitgevoerd met behulp van het programma ML3e (Prosser, Rashbash, & Goldstein, 1993). Deze analyse is gericht op de relatie tussen de vaardigheid in wiskundig redeneren na het doorlopen van het onderwijsprogramma (de natoets) met andere variabelen die gelegen zijn op het niveau van de leerling (de voortoets) of de klas (het gevolgde programma). In het kader van het gekozen model wordt getracht deze relaties te beschrijven in termen van regressies van de afhankelijke variabele (wiskundig redeneren) op de onafhankelijke variabelen op het niveau van de leerling en de klas. Bij deze regressies

wordt een onderscheid gemaakt tussen (a) de scores op de natoets die voor alle leerlingen van eenzelfde klas hetzelfde zijn (de intercepten), (b) de vermenigvuldigingsfactor volgens welke men vanuit een score op een onafhankelijke variabele de score op de natoets kan voorspellen (de helling), die niet alleen voor alle leerlingen geldt maar ook typisch is voor een klas, en (c) een resterende score. Wanneer de regressies worden berekend voor elke klas afzonderlijk, blijkt of er variatie bestaat in de intercepten of ook in de hellingen. In dat geval wordt verder onderzocht of de optredende verschillen in intercepten en hellingen tussen de klassen samenhangen met de klassenvariabelen.

Het model is opgebouwd uit twee stappen: in de eerste stap is er sprake van een binnengroep-regressie en in de tweede stap wordt een tussengroep-regressie uitgevoerd. De twee stappen kunnen als volgt worden uitgeschreven, waarbij de klas als groepsniveau geldt. In de eerste stap wordt de binnengroep-regressie uitgedrukt in de vergelijking:

$$Natoets_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}Voortoets_{ij} + \beta_{2j}Voortoets_{ij}^2 + e_{ij}$$

waarin

- i: individuele leerling ($i = 1 \dots 367$)
- j: klas ($j = 1 \dots 15$)
- m: onafhankelijke variabele op het leerlingniveau ($m = 1 \dots 2$)
- β_{mj} : helling van de regressie van prestatie op variabele m van klas j
- β_{0j} : intercept van klas j
- e_{ij} : storingsterm, met variantie s_i^2 en gemiddelde 0.

De tweede stap betreft de regressies tussen de klassen en binnen de klassen van intercept β_{0j} en hellingen β_{mj} op de klassenvariabele *Cognitief* (programma).

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}Cognitief_j + u_{0j} \\ \beta_{mj} &= \gamma_{m0} + \gamma_{m1}Cognitief_j + u_{mj}\end{aligned}$$

waarin

- $\gamma_{0\cdot}$: intercept van regressie van β_{0j} op klassenvariabele *Cognitief*
- $\gamma_{m\cdot}$: helling van regressie van β_{mj} op klassenvariabele *Cognitief*
- u_{mj} : storingsterm van de regressie van β_{mj} , met variantie t_m^2 en gemiddelde 0
- u_{0j} : storingsterm van de regressie van β_{0j} , met variantie t_0^2 en gemiddelde 0

In bovenstaand model is de variantie per klas opgenomen om (mogelijke) verschillen in intercepten en hellingen te verklaren. Het deel van het model dat intercept- en hellingcoëfficiënten voor specifieke variabelen bevat, is het 'vaste deel' van het model, het deel van het model dat de varianties van de storingstermen bevat is het 'toevalsdeel'.

Eerst wordt, in model 1, een variantiesplitsing van de afhankelijke variabele over de twee niveaus geschat. Achtereenvolgens worden daarna de leerlingvariabelen in het verklarende

deel ingevoerd, en de verschillen van de regressiecoëfficiënten tussen de klassen geschat, om ze daarna door klassenvariabelen te verklaren.

De resultaten van de multi-level analyse

De resultaten van de analyse zijn vermeld in tabel 3. In de tabel zijn de verklarende en de toevalsdelen van twee opeenvolgende modellen opgenomen.

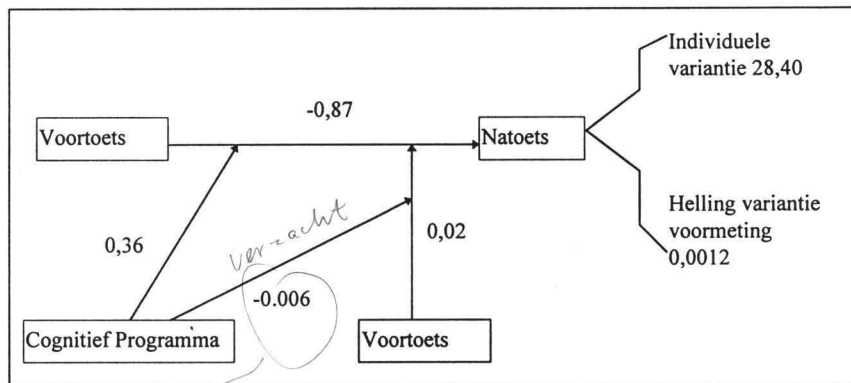
Tabel 3. De resultaten van de multilevel analyse met wiskundige redeneervaardigheid als afhankelijke variabele, N-studenten = 367, N-klassen = 15. Standaardmeetfout tussen haakjes. De *likelihood ratio* is een maat voor de passing van het model

	Model 1	Model 2
Vast deel		
Voortoets		-0,87 (0,43)
Voortoets-kwadraat		0,02 (0,004)
verschillen helling voortoets		
COGNITIEF programma		0,36 (0,10)
verschillen helling voortoets		
COGNITIEF programma		-0,006 (0,0017)
Variërend deel		
s^2 (leerling)	46,5 (3,50)	28,40 (2,14)
klas:		
t_0^2 (intercept)	9,51 (4,18)	0,0 (0,0)
t_1^2 (voortoets)		0,0012 (0,0006)
t_2^2 (voortoets-kwadraat)		0,0 (0,0)
Model statistieken		
Likelihood ratio	2477,21	2289,79
Vershil likelihood		10,18
Vershil aantal vrijheidsgraden		6
Vershil met model		1

In model 1 is de totale variantie van de nameting (de eindtoets naar wiskundig redeneren) gesplitst in een individueel deel en een klassendeel, weergegeven met s^2 en t^2 . De binnen-groep variantie is 46,48 hetgeen overeenkomt met 83 procent van de totale variantie. De tussen-klas variantie is 9,51 hetgeen overeenkomt met 17 procent van de totale variantie. Deze verhouding duidt er op dat de klassen vrij heterogeen van samenstelling zijn, waardoor er tussen klassen relatief weinig variantie is.⁵

In model 2, worden het effect van de voortoets en het differentiële effect (weergegeven door de voortoets-kwadraat) geïntroduceerd. Bovendien is in model 2 het effect van het programma opgenomen⁶. Het effect van het experimentele programma wordt vergeleken met het effect van het controle-programma. Er blijkt een positief differentiële effect te bestaan van 0,02; dit betekent dat de sterkere leerlingen een relatief grotere leerwinst boeken dan zwakkere leerlingen. Vervolgens blijkt dat er een positief effect is van het experimentele programma (0,36). De hellingverschillen tussen de klassen die gerelateerd zijn aan de voortoets, kunnen dus voor een deel worden verklaard door het programma. Het programma heeft echter nog een ander effect. Er wordt 'bovenop' het algemene, positieve effect van het experimentele programma nog een negatief effect van het experimentele programma gevonden, de coëfficiënt hierbij is -0,006. De hellingverschillen tussen de klassen die gerelateerd zijn aan de voortoets-kwadraat, kunnen voor een deel worden verklaard door het programma. Dit laatste effect 'verzacht' het geconstateerde differentiële effect.

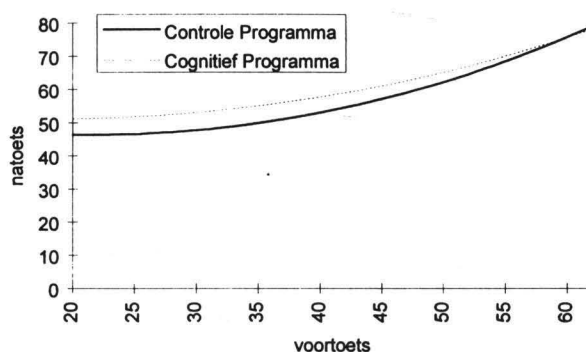
Sterke leerlingen gaan meer vooruit dan zwakke leerlingen, overeenkomstig het 'Matthéus effect'. In het cognitieve programma wordt het leerproces voor de sterkste leerlingen een klein beetje afgeremd. De sterke leerlingen winnen meer dan de zwakke leerlingen, maar vergeleken met de controleconditie is hun leerwinst iets kleiner, dit is te zien aan de coëfficiënt -0,006. Het cognitieve programma leidt tot homogenisering, het effect is echter klein. De uitkomsten van de multilevel-analyse uit tabel 3, model 2, zijn in figuur 6 met een diagram weergegeven.



Figuur 6. Weergave van de effecten het (cognitieve) programma

In figuur 6 zijn de effecten van (a) de voortoets, (b) het interactie-effect van voortoets en (cognitief) programma, (c) het differentiële effect en (d) het mitigerende effect van het (cognitieve) programma op het differentiële effect opgenomen.

In figuur 7 zijn de effecten, zoals hiervoor beschreven in tabel 3 en in figuur 6, weergegeven met behulp van regressiecurven van de voortoets op de natoets



Figuur 7. De uitkomsten van de multi-level analyse in regressiecurven

Deze curven laten zien dat het experimentele programma 'er voor zorgt' dat de scores van de meeste leerlingen omhoog gaan. De zwakke en middelmatige leerlingen profiteren van het experimentele programma, terwijl de sterke leerlingen er enigszins op achteruit lijken te gaan. Echter, dit verlies is beperkter dan de winst van de zwakke leerlingen. Het netto resultaat is duidelijk positief. Met deze redenering is overigens niet bedoeld dat de winst van de ene categorie het eventuele verlies van de andere categorie kan compenseren.

Conclusies en discussie

In dit artikel is geprobeerd een antwoord te geven op de volgende vraag: Wat is het effect van een speciale instructie en begeleiding gericht op de verwerving van cognitieve strategieën op de leerwinst van zwakke en sterke leerlingen bij het leren oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen?

Op grond van deze analyse zijn, mede in het licht van de geformuleerde hypothesen, de volgende conclusies te trekken.

Uit de uitkomsten blijkt dat het aanbieden van strategische aanwijzingen aan leerlingen een positief effect heeft op het wiskundig redeneervermogen van leerlingen in het voortgezet onderwijs. Daarmee is de *cognitieve strategie-hypothese* bevestigd. Het blijkt zinvol leerlingen te onderwijzen in het gebruik van procesgerichte strategieën bij het leren oplossen van wiskundige problemen. Het experimentele programma heeft het verwachte hoofdeffect opgeleverd. De leerlingen die het cognitieve programma hebben gevolgd scoren gemiddeld hoger op de natoets.

Op grond van de *differentiële effect-hypothese* werd verwacht dat sterkere leerlingen meer winnen per score-eenheid op de voortoets dan de zwakkere leerlingen. Er bleek inderdaad een curvi-lineair verband te bestaan tussen voortoets en de natoets. Dit verband was aanwezig in zowel de experimentele als de controle groep. Dit was te verwachten omdat er aanwijzingen uit onderzoek zijn dat zwakke leerlingen relatief weinig mogelijkheden hebben om te profiteren van groepswerk.

Er is ook een *remediërings-hypothese* geformuleerd op grond waarvan werd voorspeld dat de zwakke leerlingen in het experimentele programma, mede door de extra aandacht, meer zullen profiteren dan de zwakke leerlingen in het controle programma. Ook deze hypothese werd bevestigd. De speciale begeleiding van de zwakke leerlingen (*scaffolding*) in het experimentele programma ging gepaard met een afzwakking van het 'Matthéüs-effect'. Anders gezegd, in de experimentele groep was sprake van een homogeniserendstendens in vergelijking met de controlegroep. De heterogeniserende effecten van het 'vrije spel der krachten' in de kleine groep kunnen, tot op zekere hoogte, door een speciale instructie in cognitieve vaardigheden omgebogen worden in een meer egalitaire richting. Het aanbieden van procesgerichte strategieën bij het probleemoplossen heeft voor de zwakke en middelmatige leerlingen een positief effect, terwijl de resultaten van de sterke leerlingen er niet of nauwelijks onder te lijden hebben. Trainingen in cognitieve vaardigheden leveren doorgaans een positief resultaat op als men let op het gemiddelde, maar het behoort tot de uitzonderingen dat ook zwakke leerlingen hiervan profiteren (vgl. Hattie, Bigs, & Purdie, 1996).

We gaan nu over tot de discussie. Er wordt in dit artikel gesproken over 'differentiële effecten' of over 'leerwinst' voor verschillende categorieën leerlingen. Daarmee raakt men aan kwesties van onderwijspedagogische en onderwijssociologische aard. Bijvoorbeeld, hoe moet de schaarse begeleidingstijd van leraren worden ingezet? Kan de leerwinst van de ene categorie het eventuele verlies van de andere categorie compenseren? Ons onderzoek maakt dergelijke vragen expliciet en geeft enkele concepten en modellen voor verdere discussie. Ook wordt duidelijk dat het onderwijs door bepaalde didactische maatregelen kan ingrijpen in de 'balans van leerwinsten'. Met nieuwe analysemethoden kan deze balans als het ware onder de microscoop worden gelegd. De vraag naar het 'behoren' is daarmee nog niet beantwoord.

Ook de vraag naar de implementatie van de interventie is in dit artikel niet aan de orde gesteld, maar vormt uiteraard een belangrijk aspect van het onderzoek als geheel. Er zijn in beide condities vragenlijsten bij de leerlingen afgenomen naar hun perceptie van het 'programma-in-actie'. Ook hebben de leraren vragen beantwoord over de uitvoering in de klas en de indeling van de leerlingen in groepen. Deze kwantitatieve gegevens worden aangevuld met gegevens uit kwalitatieve observaties van het onderwijsleerproces in een beperkt aantal klassen in beide condities. Over de resultaten van het implementatie-onderzoek wordt afzonderlijk gerapporteerd.

Dit onderzoek betreft een didactische interventie van een beperkte omvang. Desondanks werden positieve effecten vastgesteld. Het samen leren oplossen van wiskundige problemen is echter een proces dat tijd vraagt. Het lijkt niet te veel gezegd dat hiervoor een culturomslag nodig is. De vraag naar de 'beklijving' van de effecten is in ons onderzoek niet te beantwoorden omdat geen retentietoets is afgenomen.

We besluiten met enkele opmerkingen over verder onderzoek op dit gebied. Het is gewenst dat in vervolgonderzoek ook andere aspecten worden betrokken. Daarbij is allereerst te denken aan een verbreding van de effectbepaling, door ook domeinspecifieke, vakinhoudelijke kennis op het gebied van de wiskunde in de analyse te betrekken. Een tweede aanbeveling betreft de aard van de training. De effecten van de speciale instructie

en begeleiding zijn mogelijk te vergroten door leerlingen niet alleen te ondersteunen bij de cognitieve kant van het leren, maar ook door aandacht te besteden aan het werken in kleine groepen. Hierbij kan gedacht worden aan een training in sociale vaardigheden voor het werken in kleine groepen (vgl. Webb & Farivar 1994). In een volgend experiment zullen cognitieve en sociale aspecten op een geïntegreerde wijze aan bod komen.

Ook lijkt het gewenst dat in vervolgonderzoek aandacht wordt besteed aan de aard en moeilijkheidsgraad van de opgaven. Naast de cognitieve en sociale aspecten zal in het toekomstige onderzoek aandacht besteed worden aan de aard van probleemtaken die leerlingen aangeboden krijgen. Hierbij zal een evenwicht gezocht worden tussen 'openheid en structuur' van de opdracht. Ook bij de keuze van taken is het van belang rekening te houden met de capaciteiten van zwakke en sterke leerlingen.

Summary

Strategies for problem solving in mathematics

This article reports on an intervention study in which two instructional programs for co-operative learning are compared: (i) an experimental program with special instruction in cognitive strategies and (ii) a control program. Two schools, 15 classes and 367 students were involved in a quasi-experimental Control Group Design with Pretest and Posttest. The experiment was conducted to answer the following question: What are the general and differential effects of a special instruction in cognitive strategies on the learning outcomes for students? The outcomes of the study clearly show the advantages of training students in cognitive strategies for problem solving in mathematics. Teaching cognitive strategies has the expected, positive effect: the students of the experimental program exceed those of the control program. Besides this main effect, the 'Matthew-effect' is mitigated in a more egalitarian direction by the intervention.

Correspondentie-adres: Drs. D. J. Hoek, Universiteit van Amsterdam, Instituut voor de Lerarenopleiding, Wibautstraat, 4, 1091 GM Amsterdam.

Noten

1. Dit artikel is een bewerking van een paper gepresenteerd op de Onderwijsresearchdagen (ORD) te Groningen 1995.

2. In cognitieve theorieën wordt een onderscheid gemaakt in typen kennis, zoals declaratieve, procedurele en strategische kennis. Declaratieve kennis is kennis van feiten, betekenissen van symbolen, concepten en principes uit een bepaald domein. Kennis van actie, manipulaties en handelingen wordt aangeduid als procedureel. Strategische kennis betreft een algemeen actieplan waarin de afzonderlijke cognitieve handelingen zijn vastgelegd. Strategische voorkennis stuurt het denkproces. (Dochy, 1993; Postner & McLeod, 1982).

3. Zie voor het begrip "drempelhypothese", Dar & Resh (1986). Classroom intellectual composition and academic achievement. *American Educational Research Journal*, 3, 357-374.

4. Dar en Resh (1994) omschrijven deze hypothese als volgt: "... the 'Matthew-effect' argues that the strong become stronger, since their superior resources give them preference over less resourced students. This effect may be understood in two senses: Students rich in resources are more capable of directly converting

their resources into academic achievement; likewise, they are more effective in extracting benefits provided by educational environments." Zie: Y. Dar en R. Resh (1994). Separating and mixing students for learning: Concepts and research. *Pedagogisch Tijdschrift*, 19/2, 109-127.

5. In deze schematische weergave van het oplossingsproces is door een fase toegevoegd, namelijk "Reflectie", die van Streun niet heeft opgenomen in zijn schema. Uit de toelichting die hij zijn schema geeft, blijkt dat hij wel oog heeft voor het belang van reflectie. Van Streun spreekt van "Terugblik" als laatste fase. Zie ook de dissertatie van J. Chr. Perrenet (1995), waarin dit model wordt besproken en voorbeelden uit de wiskunde worden toegelicht.

6. Het begrip "scaffolding" (letterlijk steigerbouw) dient in relatie te worden gezien tot een centraal concept in de theorie van Vygotskij namelijk "de zone van de nabije ontwikkeling". Scaffolding betreft de hulp die een volwassene of een meer competente medeleerling kan geven, waardoor een leerling een taak kan uitvoeren waartoe hij zonder de steun nog niet in staat is. De term "scaffolding" is reeds in de zeventiger jaren gebruikt door o.a. Wood en Bruner en wordt tegenwoordig door meerdere auteurs gebruikt, zie Azmitia en Perlmutter (1989) voor verwijzingen naar Wood en Bruner; vgl. ook Brown en Palinscar (1989) en Collins, Brown en Newman (1989).

7. Het AGO-model is ontworpen voor de eerste fase voortgezet onderwijs (basisvorming). Zie Terwel (1986). Basisvorming en het ontwerpen van onderwijsleersituaties voor 12- tot 16-jarigen. *Pedagogisch Tijdschrift*, 11/6, 354-366. Dit model is uitgewerkt in concreet lesmateriaal en in een handleiding voor leraren zie: J. Chr. Perrenet, P.G.P. Herfs en J. Terwel (1991). *Handleiding voor onderwijs in heterogene groepen*. De Lier: Academisch Boekencentrum. Voor een beschrijving van het onderzoek zie: Herfs, Mertens, Perrenet & Terwel (1991).

8. Een analoge redenering is aan te treffen in het hoofdstuk van J.L. Peschar (1995). De maatschappelijke betekenis van het onderwijs. In N.L. Dodde en J.M.G. Leune, *Het Nederlandse schoolstelsel*. Groningen, Wolters-Noordhoff.

9. Bij de interpretatie van de coëfficiënten dient rekening te worden gehouden met de vermenigvuldigingsfactoren (variabelen) in de regressievergelijkingen. Zo kan een coëfficiënt van bijvoorbeeld .90 een kleiner effect op de eindtoets betekenen dan een coëfficiënt van .02 omdat in het eerste geval met de waarde 53 (voortoets) moet worden vermenigvuldigd en in het tweede geval met 532 (voortoets-kwadraat).

Literatuur

- Azmitia, M., & Perlmutter, M. (1989). Social influences on children's cognition: State of the art and future directions. In H.W. Reese (Ed.), *Advances in child development and behavior* (pp. 90-144). New York: Academic Press.
- Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Brown, A.L., & Palinscar, A.S. (1989). Guided, cooperative learning and individual knowledge acquisition. In L.B. Resnick. Introduction, in L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction. Essays in honour of Robert Glaser* (393 - 453). Hillsdale: Erlbaum.
- Chinnappan, M., & Lawson, M.J. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry. *Learning and Instruction*, 6, no.1, 1-17.
- Cohen, E.G., & Lotan, R.A. (1995). Producing equal-status interaction in the heterogeneous classroom. *American Educational Research Journal*, 32, No. 1, 99-120.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, Publishers.
- Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cook, T.D., & Campbell, D.T. (1981). *Quasi-experimentation. Design & analysis issues for field settings*. Chicago: Rand McNally.
- Corte, E. de, & Verschaffel, L. (1988). Oplossingsvaardigheden en denkprocessen van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven. In G. Kanselaar, J. van der Linden, en A. Pennings (Ed.), *Begaafdheid, onderkenning en beïnvloeding*. Amersfoort/Leuven: Acco. (Vriendenboek voor prof. dr. Pieter Span).
- Davidson, N. (1985). Small-group learning and teaching in mathematics: A selective review of the research. In R. E. Slavin (Eds.), *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 211-230). New York: Plenum.

- Dar, Y., & Resh, N. (1994). Separating and mixing students for learning: Concepts and research. *Pedagogisch Tijdschrift*, 19/2, 109-127.
- Dochy, F.J.R.C. (1993). De invloed van voorkennis op het leerresultaat en het leerproces. In W. Tomic en P. Span (Red.), *Onderwijspsychologie. Beïnvloeding, verloop en resultaten van leerprocessen*. Utrecht: Lemma.
- Eeden, P. van den, & Terwel, J. (1994). Evaluation of a mathematics curriculum: differential effects. *Studies in Educational Evaluation*, 20, 457-475.
- Flavell, J.H. (1979). Metacognition and monitoring. A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, 60/4, 517-529.
- Ferguson-Hessler, M. (1989). *Over kennis en kunde in de fysica*. Eindhoven: technische Universiteit Eindhoven.
- Good, T.L., Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for instruction in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 165-197). New York: MacMillan.
- Guildford, J.P. (1967). The nature of human intelligence. New York: Mac Graw-Hill.
- Hattie, J., Biggs, J., & Purdie, N. (1996). Effects of learning skills interventions on student learning: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 66/2, 99-136.
- Herfs, P.G.P., Mertens E.H.M., Perrenet J.Chr., & Terwel, J. (1991). *Leren door samenwerken*. Amsterdam/Lisse: Swets en Zeitlinger B.V.
- Hoek, D.J., & Terwel, J. (1996). *Handleiding tweede bijeenkomst*. Universiteit van Amsterdam, Instituut voor de Lerarenopleiding (intern document).
- Horn, W. (1969). *Prüfsystem für Schul- und Bildungsberatung* (Handanweisung). Göttingen: Verlag für Psychologie Hochgreffe.
- Hout-Wolters, B.H.A.M. van. (1992). *Cognitieve strategieën als onderwijsdoel*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Hout-Wolters, B.H.A.M., van, Dam, G. ten, Rijlaarsdam, G., & Terwel, J. (1992). *Leren en instructie van cognitieve strategieën*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam: Instituut voor de Lerarenopleiding (ILO).
- Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1992). Positive interdependence: Key to effective cooperation. In R. Herz-Lazarowitz & N. Miller (Eds.), *Interaction in cooperative groups. The theoretical anatomy of group learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Leech, C. (1988). *How high and low achieving students differentially benefit from working together in cooperative small groups*. Stanford: Stanford University, School of Education.
- Perrenet, J.Chr. (1995). *Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs: samen of alleen*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam, Faculteit der Pedagogische en Onderwijskundige Wetenschappen (POW).
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Prosser, F., Rasbash, J., & Goldstein, H. (1991). *ML-3 Software for three level analysis: Users guide*. London: University of London, Institute of Education.
- Riemersma, F.S.J. (1991). *Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs*. Amsterdam: SCO/ Stichting Kohnstamm Fonds voor Onderwijsresearch.
- Resnick, L.B. (1989). Introduction. In L.B. Resnick (Red.), *Knowing, learning and instruction. Essays in honour of Robert Glaser*. Hillsdale: Erlbaum.
- Salomon, G., & Globerson, T. (1989). When teams do not function the way they ought to. *International Journal of Educational Research*, 13, 89-98.
- Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Red.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale N.J.: Erlbaum.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problemsolving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 165-197). New York: MacMillan.
- Slavin, R.E. (1989). Cooperative learning and student achievement. In R.E. Slavin (Red.), *School and classroom organisation* (pp. 129-156). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Slavin, R.E. (1990). Student team learning in mathematics. In N. Davidson (Red.), *Cooperative learning in mathematics* (pp. 69-102). Menlo Park, CAL: Addison-Wesley.
- Streun, A. van. (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. Groningen: Universiteit van Groningen.
- Streun, A. van. (1994). Hoe onderwijs je probleemoplossen. *Tijdschrift voor Didactiek der β -Wetenschappen*.
- Taconis, R., & Ferguson-Hessler, M.G.M. (1994). Het belang van probleemoplossen voor het onderwijs in technische en exacte vakken. *Tijdschrift voor Didactiek der β -Wetenschappen*.
- Terwel, J., & Eeden, P. van den. (1990). Effecten van gedifferentieerd wiskunde onderwijs, de toepassing van een model voor multilevel analyse bij curriculumevaluatie. *Tijdschrift voor onderwijsresearch*, 15/5, 273-284.

- Terwel, J., & Eeden, P. van den. (1992a). Differentiële effecten van het werken in kleine groepen: theorie, hypothesen en onderzoek, *Pedagogische Studiën*, 51, 51-66.
- Terwel, J., & Eeden, P. van den. (1992b). Curriculum evaluation and multilevel analysis: effects of cooperative learning in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 18, 133-148.
- Terwel, J., Herfs, P.G.P., Mertens, E.H.M., & Perrenet, J.Chr. (1994). Co-operative learning and adaptive instruction in a mathematics curriculum. *Journal of Curriculum studies*, 26/2, 217-233.
- Terwel, J. (1994). *Samen onderwijs maken. Over het ontwerpen van adaptief onderwijs*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Veenman, V.J., & Elshout, J.J. (1992). Intelligentie en metacognitieve vaardigheden. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 17/5, 290-302.
- Webb, N.M. (1982). Group composition, group interaction, and achievement in cooperative small groups. *Journal of Educational Psychology*, 74, 475-484.
- Webb, N.M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research*, 13, 21-39.
- Webb, N.M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 366-389.
- Webb, N.M., & Farivar, S. (1994). Promoting helping behavior in cooperative small groups in middle school mathematics. *American Educational Research Journal* 31/2, 369-395.

Trefwoorden

Swidoc systematische code: 15.15 Secundair onderwijs

Swidoc trefwoorden:

wiskunde-onderwijs
 groepsonderwijs
 leerprestaties